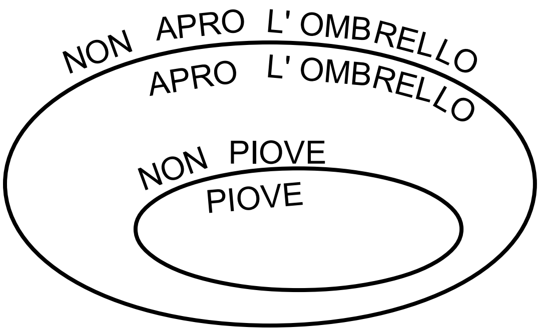
Implicazione logica

Consideriamo come esempio la seguente affermazione:

Se piove apro l' ombrello

Piove $\Longrightarrow$ Apro l' ombrello

Piove = P *(antecedente)*
Apro l' ombrello = Q *(conseguente)*



In pratica se piove sicuramente apro l' ombrello, ma se apro l' ombrello non è detto che piova.
Allo stesso modo, se **non** apro l' ombrello sicuramente **non** piove, ma ma se non piove non è detto che non apra l' ombrello.
Quanto appena detto potrebbe essere schematizzato così:

Piove $\Longrightarrow$ Apro l' ombrello

Apro l' ombrello
- Piove
- Non piove

Non apro l' ombrello $\Longrightarrow$ Non piove

Non piove
- Non apro l' ombrello
- Apro l' ombrello

Possiamo dedurre che se la condizione P implica la condizione Q, l' inverso di quest' ultima implica l' inverso della condizione P:

$P \Rightarrow Q$ $\qquad\qquad$ $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Non apro l' ombrello $\Rightarrow$ Non piove

La tabella della verità è la seguente:

Piove; apro l' ombrello VERA
Piove; **non** apro l' ombrello FALSA
Non piove; apro l' ombrello VERA
Non piove; **non** apro l' ombrello VERA

P	**Q**	**$P \Rightarrow Q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dalla tabella possiamo osservare che la proposizione $P \Rightarrow Q$ è vera quando si verifica una o entrambe le seguenti condizioni:

Non piove
Apro l' ombrello

Quindi possiamo dire che un' implicazione equivale ad una dichiarazione formata dall' antecedente negata *(**Non** piove)* e dalla conseguente *(Apro l' ombrello)*, legate dal connivo OR.

$P \Rightarrow Q$ equivale a $\overline{P}$ OR Q

$\overline{P}$	**Q**	**$\overline{P}$** OR **Q**
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	F	V

Doppia implicazione

Consideriamo come esempio la dichiarazione:

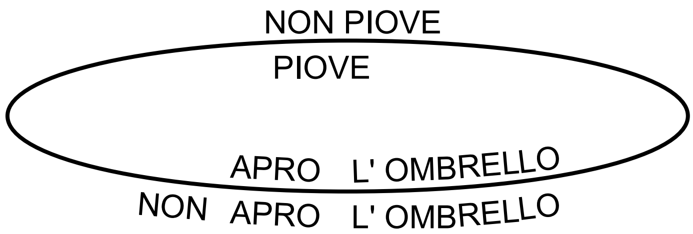
Se e solo se piove apro l' ombrello

Piove $\Longrightarrow$ Apro l' ombrello

Non piove $\Longrightarrow$ Non apro l' ombrello

In questo caso si ha un' implicazione reciproca, che viene rappresentata così:

Piove $\Longleftrightarrow$ Apro l' ombrello



La tabella della verità è la seguente:

Piove; apro l' ombrello VERA
Piove; **non** apro l' ombrello FALSA
Non piove; apro l' ombrello FALSA
Non piove; **non** apro l' ombrello VERA

P	**Q**	**P $\Leftrightarrow$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esempio pratico

Un' isola è abitata da due tipologie di individui:
- i **cavalieri**, che dicono sempre la **verità**
- i **furfanti**, che **mentono** sempre

Un forestiero, incontrando due abitanti **A** e **B**, chiede ad **A**:
"*Lei è un cavaliere o un furfante?*"
A risponde: "*Se **B** è un cavaliere io sono un furfante*"
Cosa sono **A** e **B**?

$$P \Rightarrow Q$$

B è un cavaliere *(P)* $\Rightarrow$ A è un furfante *(Q)*

$\overline{P}$ = B è un furfante $\overline{Q}$ = A è un cavaliere

1) B è un cavaliere; A è un furfante VERA
2) B è un furfante; A è un furfante VERA
3) B è un cavaliere; A è un cavaliere FALSA
4) B è un furfante; A è un cavaliere VERA

P	**Q**	**P $\Rightarrow$ Q**
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

<u>Ipotesi 1: A furfante</u>

Dato che i furfanti mentono sempre, la proposizione pronunciata da A è falsa, quindi dalla tabella della verità avremo:

3) B è un cavaliere; A è un *cavaliere*

Ma ciò contraddice la nostra ipotesi, che va quindi esclusa.

<u>Ipotesi 2 : A cavaliere</u>

Dato che i cavalieri dicono sempre la verità, la proposizione pronunciata da A è vera. Dalla tabella abbiamo tre casi in cui la proposizione è vera, ma l' unico che non contraddice l' ipotesi è il numero 4, quindi:

B è un furfante; A è un cavaliere